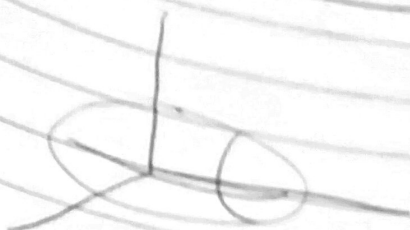


22/5/17

→ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ 2^{ου} βαθμού

1) Ελλειψοειδές

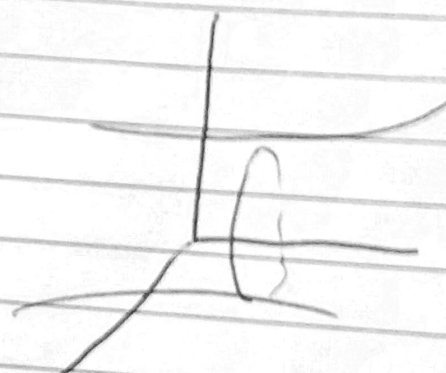
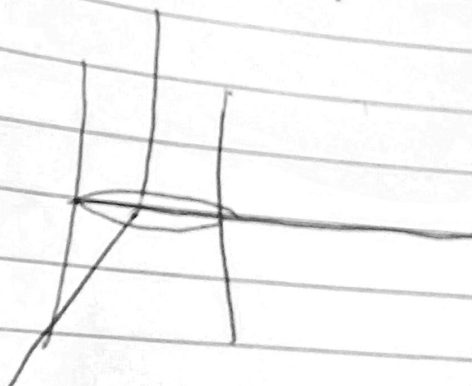
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, a, \beta, \gamma > 0$$



2) Μονόχωο υπερβολοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$



3)

Δίχωο υπερβολοειδές

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \quad (*)$$

Συμμετρική επιφάνεια ως προς το O,
τα επίπεδα ορίζονται τα σημεία και τους
αξόνους

$$(*) \quad \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} \geq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 1$$

• Τομές με επίπεδα $z = \lambda$

$$\begin{cases} z = \lambda \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\lambda^2}{c^2} - 1 \end{cases}$$

Αν $\lambda > c$ τότε η εξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\lambda^2}{c^2} - 1$$

παριστάει

μία ελλείψη.

Άρα οι τομές της επιφάνειας με επίπεδα παράλληλα στο Oxy είναι της μορφής $z = \lambda$, $\lambda > c$ είναι ελλείψεις.

• Τομές με επίπεδα $y = \lambda$

$$\begin{cases} y = \lambda \\ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{\lambda^2}{b^2} \end{cases}$$

1) Ελλειπτικές παραβολοειδές

$$\star \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2fz \quad a, b > 0, f \neq 0$$

Αν το $P(x, y, z)$ επαρκεί την $(\star)$

τότε και τα σημεία $P_1(-x, -y, z)$, $P_2(-x, y, z)$

$P_3(x, -y, z)$ επαρκούν την εξίσωση

(έχουμε άρτιες συμμετρίες).

Τομές με επίπεδα $z = \lambda$

$$\begin{cases} z = \lambda \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2f\lambda \end{cases}$$

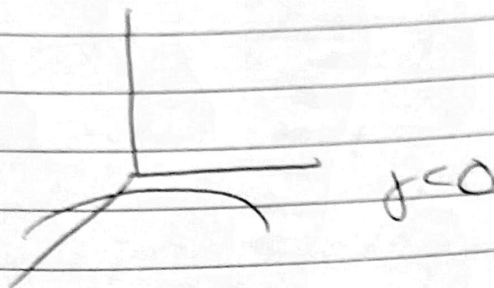
• Τομές με επίπεδα $y = \lambda$

$$\begin{cases} y = \lambda \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2f\lambda \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \lambda \\ \frac{x^2}{a^2} = 2f\lambda - \frac{z^2}{c^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2fa^2 \left(3 - \frac{\lambda^2}{2\beta^2 f} \right) \text{ παραβολή}$$

Ομοίως για τις τυχόν με τα επίπεδα $x=\lambda$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 2fy$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 2fz$$

(ελλειψοειδής παραβολοειδής)

5) Υπερβολικό παραβολοειδές

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 2fz}$$

$$\text{ή } \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{\beta^2} = 2fy$$

ή

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{\beta^2} = 2fx$$

• Τυχόν με επίπεδα $z=\lambda$

$$\begin{cases} z=\lambda \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 2f\lambda \end{cases}$$

• Για $\lambda=0$ είναι
 τυχόν τεμνομένων
 επιπέδων

$$\begin{cases} z=0=\lambda \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} = 0 \end{cases}$$

• Για $\lambda \neq 0$ είναι υπερβολές.

• Τομές με επίπεδα $y = \lambda$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \lambda \\ \frac{x^2}{a^2} = 2\lambda z + \frac{\lambda^2}{\beta^2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow x^2 = 2\lambda a^2 \left(\frac{z + \frac{\lambda^2}{2\beta^2}}{\lambda} \right)$$

Παραβολές αυτές σε
δύο εξισώσεις.

Ομοίως οι τομές με το επίπεδο $x = \lambda$
είναι παραβολές

6) Ελλειπτική κώνος

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

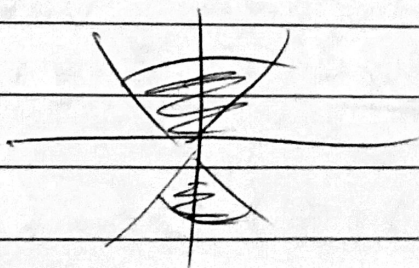
$$\text{ή} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

• Συμμετρικές ως προς το 0, τα επίπεδα
συεσταθμεύουν και τις άξονες. Το μόνο σημείο
τομής της επιφάνειας με τους άξονες είναι το
 $O(0,0,0)$

• Τομές με επίπεδα $z = \lambda$

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \lambda \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \end{array} \right. \quad \text{για } \lambda \neq 0 \text{ είναι}$$

ελλειψή



2) Στο χώρο παριστάει επιφάνεια, για να παριστάει καμπύση χρ^ε αβάρμα δύο εζ^ο γιατί οι καμπύσες είναι οι τμήσ επιφάνειων.

Έλδερμ στο Οκ^ο με εζ^ο $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Έστω $P_0(x_0, y_0, z_0)$ σημείο της

$$\text{Έλδερμ} \begin{cases} z=0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Θεωρώ την ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, 0)$ και είναι στα ΟΖ. Έχει παραμ. εζ^ο.

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot 0 \\ y = y_0 + t \\ z = 0 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + t \\ z = t \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

η (ε) περιέχεται στην επιφάνεια.

Ελδερμτικός κλάδος: ~~ε~~ ευθείας

Επιφάνεια (γεννίστα από μια σταθερή

ευθεία η οποία είναι σταθερή, τμήσει μια καμπύση σε ένα σταθ. σημείο).

Στο χώρο η εζ^ο $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ παρ. στίφει κλάδος επιφάνειας

~~Τραπέζι~~

Πρόβλημα Τι είναι το συνολικό άθροισμα
 (στα χώρο) της γενικής εξίσωσης
 2ου βαθμού
 $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$
 $+ 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$ 4 τετραγωνικές μορφές
 $a_{ij}, b_i, b_2, b_3, c \in \mathbb{R}$

Τετραγωνικές μορφές του $\mathbb{R}^n$ ($n=2, n=3$)

Μια τετραγωνική μορφή του $\mathbb{R}^n$ είναι μια
~~ομομορφισμός~~ συνάρτηση $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ της μορφής
 $q(\vec{x}) = q(x_1, \dots, x_n) =$
 $= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$, όπου $a_{ij} = a_{ji}$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij})$ νκν συμμετρικός
 πίνακας

$$q(\vec{x}) = X^t A X$$

$$\vec{x} = (x_1 \dots x_n) = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

$$\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1).$$

Αλλάζοντας βάσεις Έστω $\{\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n'\}$ τυχαία
 ορθοκανονικά βάσεις.

A' = Πίνακας της q ως προς αυτήν, δηλαδή

$$q(\vec{x}) = q\left(\sum_{i=1}^n x_i' \vec{e}_i'\right) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}' x_i' x_j' =$$

$$(x')^t A' x' \quad \text{όπου } x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P^t = P^{-1}$$

Έστω P ο ορθογώνιος πίνακας (and ορθογώνια βάσεις
 σε ορθοκανονικές βάσεις) μεταβάλλει and την
 μία βάση στην άλλη $P^t = P^{-1}$
 Ισχύει ότι $A' = P^t A P = P^{-1} A P$

και $X = Px'$

Θεώρημα

- Για κάθε συμμετρικό $n \times n$ πίνακα ισχύουν τα ακόλουθα.
- i) Όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές
 - ii) Υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P $n \times n$ τ.ω $P^{-1}AP$ να είναι ένας διαγώνιος πίνακας $n \times n$ όπου στη γραμμή i διαγώνιο θα εμφανίζεται οι ιδιοτιμές του A

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας A' της τετραγωνικής μορφής ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n'\}$ θα είναι

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$q(\vec{x}) = q\left(\sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i'\right) = (x')^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} x$$

$$\Rightarrow q(\vec{x}) = \lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2$$

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i'$$

Παράδειγμα:

Τι παριστάνει η εξίσωση $2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz =$

Απάντηση:

Θεωρώ την τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$q(\vec{x}) = q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz$$

ή ισοδύναμα $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$, όπου $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

και $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 50 βαθμολογία

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \dots = \lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$$

Άρα ο A έχει ιδιοτιμές

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή

$\lambda_1 = 0$ είναι όλα τα διανύσματα $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$...

$$V(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| (A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\vec{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ -x + z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ είναι ορθ. βάση του } V(\lambda_1)$$

$$V(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ -x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιο με τα $V(\lambda_2)$

$$V(\lambda_3) = \left\{ x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ ορθογώνιο με τα } V(\lambda_3).$$

$$\vec{x} = (x, y, z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\vec{x} = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2' + z'\vec{e}_3'$$

όπου

$$\vec{e}_1' = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$$

$$\vec{e}_2' = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

$$\vec{e}_3' = (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$$

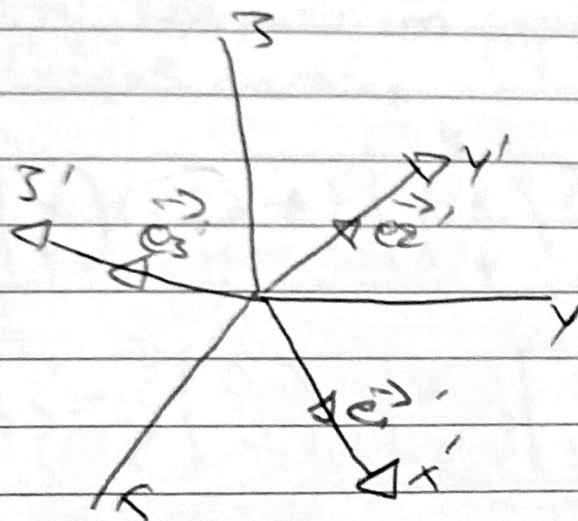
* Τις βάσεις ίδια σειρά με ιδιοτιμές τις παίρνουμε *

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$q(\vec{x}) = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2$$

$$q(\vec{x}) = (y')^2 + 3(z')^2$$

Οπότε



$$(*) \Leftrightarrow (y')^2 + 3(z')^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{(y')^2}{1^2} + \frac{(z')^2}{(1/\sqrt{3})^2} = 1$$

ελλειψοειδές κοίτης

Άσκηση:

Να μελετηθεί η εξίσωση.
 $\circledast$ $Sx^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 29 = 0$

Νισα θεωρώ τετραγωνική μορφή
 $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $q(x, y) = Sx^2 + 4xy + 2y^2$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} S & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

max x^2 $2 \cdot x \cdot y$ συντελ. για y

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} S-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-6)$$

Άρα ιδιοτιμές $\lambda_1=6$, $\lambda_2=1$ (Γραμμένο λόγω με αντιστρεψιμότητα της σειράς)

Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=6$ παίρνει σημασία

$$V(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / (A - 6I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / -x + 2y = 0 \right\}$$

$$V(\lambda_1) = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ ορθ. βάση του } V(\lambda_1)$$

normas $\sqrt{2^2+1^2}$

Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2 είναι

$$V(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| (A - \lambda_2 I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| 2x + y = 0 \right\}$$

$$V(\lambda_2) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ ορθ. βάση του } V(\lambda_2)$$

Άρα $\{ \vec{e}_1' = (2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}), \vec{e}_2' = (-2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) \}$
(ορίζεται πρέπει να είναι θετική)

οι ορθονομικά βάση του $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{x} = x \vec{e}_1 + y \vec{e}_2 = x' \vec{e}_1' + y' \vec{e}_2'$$

$$Q(x, y) = (x')^2 + A'x', \quad x = Px'$$

$$\text{όπου } x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad A' = P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} x' - \frac{2}{\sqrt{5}} y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' \end{cases}$$

$$Q(x, y) = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 = 6(x')^2 + (y')^2$$

Ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_2 είναι

$$V(\lambda_2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid (A - \lambda_2 I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid 2x + y = 0 \right\}$$

$$V(\lambda_2) = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ ορθ. βάση του } V(\lambda_2)$$

Άρα $\{\vec{e}_1'\} = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, $\vec{e}_2' = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ (ορίζεται πρέπει να είναι ορθών)

ορθονομοποιημένα βάση του $\mathbb{R}^2$.

$$\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2'$$

$$g(x, y) = (x')^2 + \lambda_2 (y')^2, \quad x = Px'$$

όπου $x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} x' - \frac{1}{\sqrt{5}} y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} x' + \frac{2}{\sqrt{5}} y' \end{cases}$$

$$g(x, y) = \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 = 6(x')^2 + (y')^2$$

To $\frac{1}{\sqrt{5}}$ παρόμοιο μέτρος είναι

$$-24x - 12y = \frac{-48}{\sqrt{5}} x' + \frac{24}{\sqrt{5}} y' - \frac{12x'}{\sqrt{5}} - \frac{24y'}{\sqrt{5}}$$

$$-24x - 12y = \frac{-60}{\sqrt{5}} x'$$

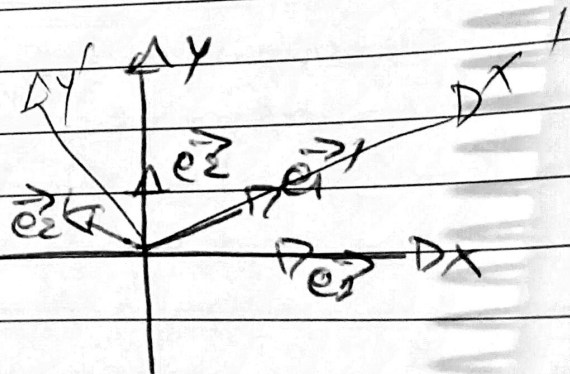
(*) $\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} 6(x')^2 + (y')^2 - \frac{60}{\sqrt{5}} x' + 29 = 0$

(υπόλο συμπλήρωση τετραγώνου).

$$\Rightarrow 6\left((x')^2 - \frac{10}{\sqrt{5}} x'\right) + (y')^2 + 29 = 0$$

$$\Rightarrow 6\left((x')^2 - 2\sqrt{5}x' + (\sqrt{5})^2 - 5\right) + (y')^2 + 29 = 0$$

$$\Rightarrow 6(x' - \sqrt{5})^2 + (y')^2 = 1$$

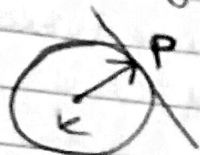


Θέλουμε να στείναμε συντεταγμένες να ληφθούν
από παραπάνω μεταφορά τα $Ox'y'$ σε
 $O'x''y''$ με αρχή $O'(\sqrt{5}, 0)$

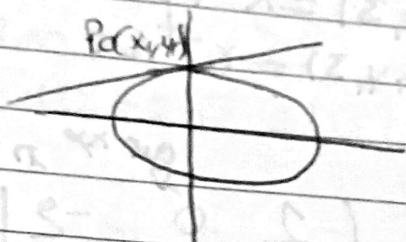
$$\text{Στο } O'x''y'' (*) \Leftrightarrow 6(x'')^2 + (y'')^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x'')^2}{(2/\sqrt{6})^2} + \frac{(y'')^2}{1^2} = 1$$

Κυκλική τμήκη στο επίπεδο οαγ : έχει
 εξίσωση της μορφής
 (c) $ax^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \zeta = 0$

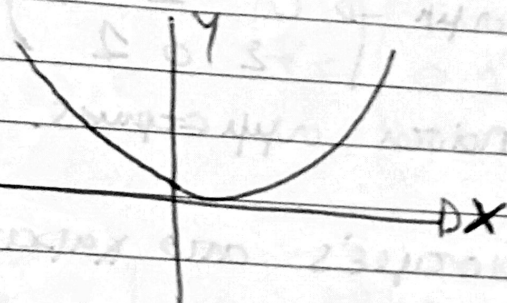


Εφαπτομένη ευθεία του κυκλίου



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$



$y = x^2$
 Παραβολή

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Μια εφάντα καθεστώς
 καμιά αν έχει δύο σημεία.
 ≥ 2

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Συμπέρασμα : Η εφαπτομένη ευθεία
 της (c) στο σημείο $P_0(x_0, y_0)$ είναι
 $axx_0 + \beta(x_0 + x_0y) + \gamma y_0 + \delta(x + x_0) + \varepsilon(y + y_0) + \zeta = 0$